Школа им. А.М. Горчакова

Исследование устойчивости орбит планет вокруг двойных звезд с помощью компьютерной модели

Работу выполнил: Ким Андрей
Научный руководитель: А.С. Цветков

Павловск, 2012 год

Оглавление

Введение

Цель данной работы заключается в выборе математической и создании на ее основе компьютерной модели, описывающей обращение планеты вокруг двойной звезды, поиске на этой модели устойчивых орбит планеты, исследовании данной модели и исследовании устойчивости найденных орбит.

Таким образом, работа представляет собой численное моделирование задачи 3-х тел с ограниченным условием, а именно, масса третьего тела мала, поэтому влиянием его гравитационного поля на два массивных тела можно пренебречь. Как известно, задача 3 тел в Ньютоновской механике не имеет аналитического решения, поэтому численное моделирование гравитирующих систем из большого числа тел до сих пор остается актуальной задачей для исследователей.

В ходе исследования следует ответить на вопросы, касающиеся критерия связанности подобных систем, возможных вариантах устойчивой орбиты планеты и критериев устойчивости орбиты. В данном исследовании будет также описана и исследована компьютерная модель – ее достоверность, недостатки и неточности в сравнении с реальной физической ситуацией, будут описаны погрешности, способы их исправления или их последствия.

Методом исследования является компьютерное моделирование физической ситуации на языках программирования Pascal и C++.

Основные термины и понятия:

Орбита – траектория движения материальной точки в поле сил, действующих на неё.

Двойная звезда, или двойная система — система из двух гравитационно связанных звезд, обращающихся по замкнутым орбитам вокруг общего центра масс.

Центр масс – геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого.

Планета – это небесное тело, вращающееся по орбите вокруг звезды или её остатков, достаточно массивное, чтобы стать округлым под действием собственной гравитации, но недостаточно массивное для начала термоядерной реакции.

Устойчивость — способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий

Планетная система — система звезды и различных незвёздообразных астрономических объектов: планет и их спутников, карликовых планет и их спутников, астероидов, метеороидов, комет и космической пыли, которые вращаются вокруг общего центра масс.

Связанная система – система, в которой при отсутствии внешних воздействий ни один из компонентов не может отдалиться от других на физическую бесконечность (силы взаимодействия несущественны).

Глава 1. Математическое описание движения гравитационно взаимодействующих тел

§1.1 История открытия законов, описывающих гравитационное взаимодействие тел

Законы движения небесных тел Солнечной системы были открыты немецким ученым **Иоганном Кеплером**. Эти законы формулируются следующим образом:

1. Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.

Однако эти законы описывали движение тела без объяснения причин, обуславливавших это движения, т.е. имели только кинематический характер. Некоторые ученые того времени, например **Г. Галилей**, **Н. Коперник** и тот же **Кеплер**, отмечали способность небесных тел притягиваться друг к другу. А **Р. Гук** отметил факт увеличения притяжения небесных тел по мере приближения их друг к другу.

Опираясь на достижения предшественников, наиболее полное и строгое описание взаимодействия тел дал **И. Ньютон** в 1687 г. в своем знаменитом трактате «*Математические начала натуральной философии*». Он открыл закон, впоследствии получивший название **закона всемирного тяготения**: сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками массы m_1 и m_2, разделёнными расстоянием R, пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, т.е.: $F = G * \frac{m_1 * m_2}{R^2}$,

где G — гравитационная постоянная, равная $6.67384*10^{-11}\ \frac{м^3}{с^2 * кг}$.

Данной формулой Ньютона определяются силы взаимодействия между телами во всех основных задачах небесной механики, для которой закон всемирного тяготения является фундаментом[1].

§1.2 Задача n тел и ее частные случаи.

Одной из таких задач является задача n тел, суть которой заключается в том, чтобы по известным начальным параметрам (масса, скорость, начальные координаты) n материальных точек, находящихся в пустоте, определить их положение в любой момент времени при условии, что попарное взаимодействие точек подчинено закону тяготения Ньютона, а силы гравитации аддитивны. Данная задача является модельной задачей, т.е. рассматриваются идеальные условия (размерами небесных тел можно пренебречь, массы тел постоянны, сопротивление межпланетного пространства отсутствует и т.д.)

Задача n тел не решена до сих пор, однако известны решения двух частных случаев (n=1, n=2), которые были найдены еще Ньютоном. По первому закону Ньютона при n=1 тело будет двигаться равномерно и прямолинейно, т.к. на него не действуют никакие другие тела. При n=2 тела будут двигаться по коническим сечениям (кеплеровским орбитам).

1 А.П. Маркеев, «Задача трех тел и ее точное решение», Соросовский образовательный журнал, №9, 1999, стр. 112-113

Огромный интерес ученых вызывал случай n=3, над которым в свое время работали великие ученые, такие как Ж. Лангарж, К. Якоби, Дж. Биркгоф и др., однако общее решение этой задачи построено так и не было. В конце XIX века Г. Брунсу и А. Пуанкаре удалось доказать, что общее решение задачи трех тел нельзя выразить через алгебраические или через однозначные трансцендентные функции координат и скоростей тел.

Но еще в конце XVIII в. были найдены частные решения задачи 3-х тел. В 1767 г. Л. Эйлер открыл частные решения, в которых все три тела постоянно лежат на одной прямой, вращающейся вокруг общего центра масс тел в соответствии со вторым законом Кеплера, а расстояние между телами изменяются по законам кеплеровских движений. Такие решения получили название прямолинейных (коллинеарных), или эйлеровых решений[2].

Другие частные решения были найдены французским ученым Ж.Л. Лагранжом. В своей работе «*О задаче трех тел*» он показал, что три взаимно притягивающиеся по закону Ньютона материальные точки, расположенные в вершинах равностороннего треугольника произвольных размеров, при определенных по величине и направлению скоростях, будут и в последующем двигаться, постоянно образуя равносторонний треугольник. Изменение его стороны со временем и вращение вокруг центра масс можно определить, пользуясь законами Кеплера. Такие частные решения называют треугольными, или лагранжевыми, решениями[3].

Стоит акцентировать внимание на ограниченную задачу трех тел. Ограниченная задача отличается от общего случая тем, что одно из трех

---

[2] А.П. Маркеев, «Задача трех тел и ее точное решение», Соросовский образовательный журнал, №9, 1999, стр. 113-115

[3] Г.Н. Дубошин, «Справочное руководство по небесной механике и астродинамике», М.: «Наука», 1976, стр. 528-532

тел имеет массу много меньшую по сравнению с массами двух других тел, т.е. влиянием этого тела на остальные можно пренебречь.

Частные решения ограниченной задачи трех тел при условии, что орбиты всех тел являются круговыми, известны – это пять точек либрации или точек Лагранжа. Если третье тело (тело с пренебрежимо малой массой) поместить в эти точки с нулевой скоростью во вращающейся системе координат, то оно останется неподвижным. Три точки Либрации находятся на одной прямой с двумя массивными телами, а две – в точках, с которыми массивные тела образуют равносторонний треугольник.

Существуют реальные небесные тела, которые иллюстрируют частные решения задачи трех тел. В 1907 г. в Гейдельберге астрономы открыли астероид, движущийся вблизи орбиты Юпитера, впереди него на 60°, и образующий вместе с Солнцем и Юпитером равносторонний треугольник. Тем самым в природе было обнаружено движение, существование которого предсказывалось теоретическим исследованием Лагранжа. Астероиду дали имя Ахиллес. В результате дальнейших наблюдений было найдено еще восемь астероидов, движущихся недалеко от Ахиллеса в окрестности вершины равностороннего треугольника, а также пять астероидов, отстающих от Юпитера на 60° и образующих с ним и Солнцем другой равносторонний треугольник. Все эти малые планеты получили мужские имена, взятые из древнегреческого эпоса о Троянской войне. Астероиды первой группы получили имена героев греческого войска, поэтому их иногда называют «греками». Астероиды, отстающие от Юпитера, именованы в честь защитников Трои — они известны как «троянцы».

В 1961 г. астроном Краковской обсерватории К. Кордылевский обнаружил «тусклые облакоподобные спутники» в окрестности треугольной точки либрации системы Земля — Луна. Несколько позже он сообщил о наблюдении аналогичного космического облака вблизи другой треугольной точки либрации этой системы. Эти открытия были вскоре подтверждены американскими астрономами.

Что касается устойчивости точек либрации, то прямолинейные точки Лагранжа не являются устойчивыми[4]. С треугольными точками либрации все сложнее. Во второй половине XX века были сформулированы условия устойчивости треугольных точек Лагранжа для кругового и плоского варианта ограниченной задачи. Отношение масс массивных тел должно быть больше 24,96[5]. Но для остальных ситуаций общее решение устойчивости треугольных точек либрации не найдено.

§1.3 Математическая модель движения системы трех небесных тел

Для проведения исследования была выбрана следующая математическая модель движения системы трех небесных тел. Тела в модели подчиняются законам классической механики, а именно закону Всемирного тяготения и трем законам Ньютона. Все космические объекты являются точечными гравитационными зарядами, порождающими вокруг себя гравитационное поле. Тела находятся в пространстве, которое не обладает каким-либо сопротивлением и не оказывает какого-либо влияния на тела. Рассматривается только плоский вариант. Каждому из тел изначально задаются его масса, проекции начальной скорости и координаты в декартовой системе. Изменение координаты тела рассчитывается методом Симпсона, считая движение

[4] А.П. Маркеев, «Задача трех тел и ее точное решение», Соросовский образовательный журнал, №9, 1999, стр. 115-117

[5] Neil J. Cornish «The Lagrange Points» [http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf], стр. 8

за заданный промежуток времени как равноускоренное. По второму закону Ньютона $\vec{F} = \overrightarrow{ma}$. Откуда $a = \frac{F}{m}$, что по определению является напряженностью гравитационного поля в точке, если считать, что m в данной ситуации является гравитационной массой. Таким образом, считается, что гравитационная и инертная масса равны. В данном случае ускорение тела считается как сумма напряженностей гравитационных полей двух других тел. По закону Всемирного тяготения $F = G * \frac{m_1 * m_2}{R^2}$.

Следовательно, напряженность для поля точечного заряда равна:

$$E = \frac{G * \frac{m * M}{R^2}}{m} = G * \frac{M}{R^2}$$, где

- G — гравитационная постоянная;
- M — гравитационная масса тела-источника поля;
- R — расстояние от исследуемой точки пространства до центра масс тела-источника поля.

Необходимо отметить одну характерную особенность этой модели. При расчете ускорения тела, не учитывается его масса, т.е. по второму закону Ньютона: $\vec{F} = \overrightarrow{ma}$. В данном случае $F = mg$, где g – суммарная напряженность, т.е. $ma = mg$, а значит, $a = g$. Но в случае $m = 0$, это сокращение не допустимо. Однако созданная модель рассчитывает ускорение и для тела нулевой массы, что неправильно с точки зрения второго закона Ньютона, но позволяет моделировать ситуации, при которой не учитывается влияние на два массивных тела третьего с меньшей массой (ограниченная задача трех тел). Напряженность поля такого тела равна нулю.

Для моделирования ограниченной задачи трех тел была выбрана математическая модель, опирающаяся на гравитационные законы, открытые Исааком Ньютоном. В данной модели все тела считаются материальными точками, их движение считается равноускоренным за заданный временной промежуток, а ускорение вычисляется как векторная сумма напряженностей полей двух других гравитационных тел в данной точке.

Глава 2. Поиск устойчивых орбит вокруг двойных звезд и исследование их устойчивости на компьютерной модели

§2.1 Описание компьютерной модели

На основе математической модели, описанной в главе №1, была создана компьютерная модель планетной системы, которая представляет собой программы на языках C++ и Pascal. В обоих случаях используется объектно-ориентированное программирование. Ветвь блок-схемы программы без формул вычисления представлена на рисунке 1.
Модель в визуальном плане была следующей (рис.2): все тела представлялись в виде кругов, тела с большей массой имеют больший радиус. На экране возникали номер эксперимента, текущие значения полной энергии каждого тела и всей системы в целом, время существования системы (в годах), текущая скорость легкого тела и количество оборотов, совершенных легким телом (добавлено позднее).
В качестве дополнительных параметров в зависимости от эксперимента могли отображаться такие параметры как, например, максимальное расстояние легкого тела от центра масс двойной звезды или время, через которое энергия одного из компонентов системы становилась больше нуля.

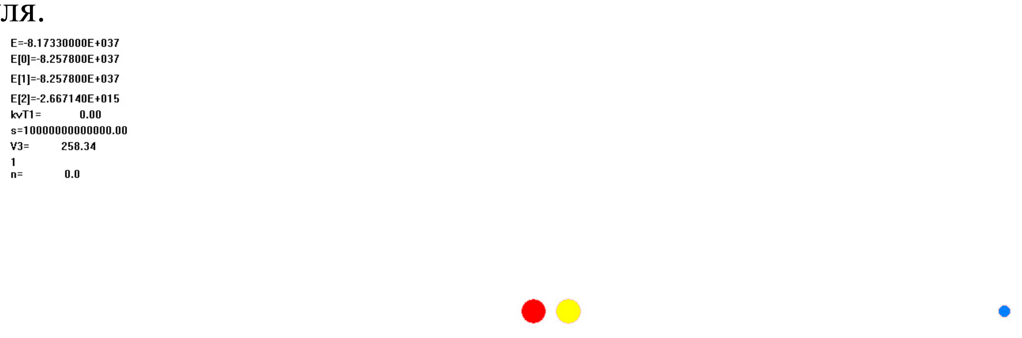

рис.2

Где **x0**, **y0**, **vx0**, **vy0**, **m** – начальные параметры тел (координаты, проекции скоростей и масса соответственно); **dt** – начальный промежуток времени, для которого считается ускорение; **ax**, **ay** – проекции ускорения тела; **r** – расстояние между телами; **T** – время существования системы.

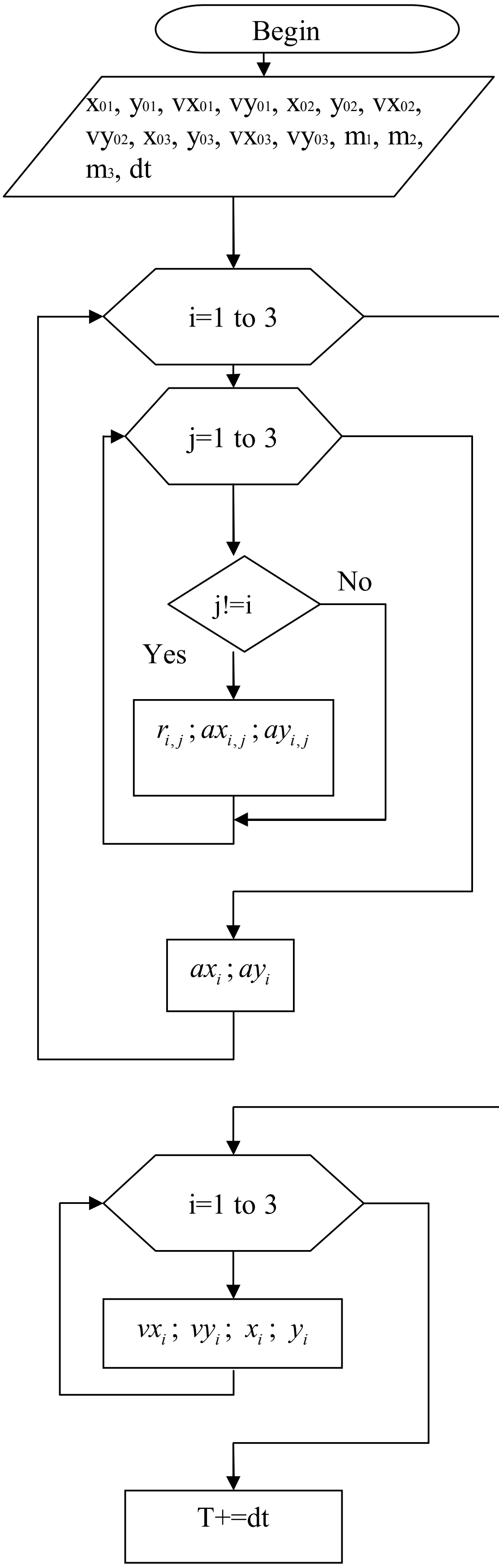

рис. 1

Конечно, как и у любой модели, у данной имеются свои отличия от реальной ситуации и свои недостатки. В первую очередь это касается существующего кванта времени. Под квантом времени в данной ситуации подразумевается время, в течение которого тело движется с постоянным ускорением. Это время в программе может уменьшаться в зависимости от расстояния между телами, что будет описано несколько позднее. Данное понятие вводится для того, чтобы различать время, за которое считается ускорение, от времени существования системы или иного другого времени, выступающего в роли результата эксперимента. Квант времени приближает движение к равноускоренному, но движение небесных тел таковым не является. Такое приближение было бы точным в ситуации, где временной промежуток, за который считается пройденный путь, стремился бы к нулю. Но в условиях компьютерной модели это невозможно реализовать по двум причинам: нельзя задать этот промежуток как бесконечно малую величину, и даже при достаточно малом кванте времени, временной ресурс, который бы потребовался компьютеру для обработки информации и расчетов, был бы очень велик.

К недостаткам модели можно также отнести отсутствие сопротивления межпланетного пространства, которое в реальности не является абсолютным вакуумом, а также то, что небесные объекты не являются материальными точками. Последний недостаток несущественен, если объекты обладают сферически-симметричным распределением масс.

В ходе исследования большое количество экспериментов было направлено на проверку корректности и правильности работы модели и на оценку ее точности. Большинство экспериментов на правильность кода дали положительный результат, свидетельствовавший об отсутствии ошибок в модели, правильности вычислений и соблюдении гравитационных законов. Например, был проведен эксперимент, в котором все тела покоились на одной прямой. Затем тела притянулись друг к другу, и произошло столкновение.

Однако один из экспериментов дал отрицательный результат. Эксперимент заключался в том, что неподвижное третье тело было помещено в центр масс одинаковых массивных тел, с сообщенными им противоположными по направлению, но одинаковыми по модулю начальными скоростями, направленными по касательной к окружности с центром в центре масс и радиусом, равным расстоянию между центром масс и телами. В этой ситуации, вследствие симметрии и закона всемирного тяготения, на третье тело со стороны движущихся будут действовать силы, равные по модулю, но противоположные по направлению. Эти силы будут компенсировать друг друга таким образом, что третье тело будет неподвижно. Это одна из прямолинейных точек либрации[6]. Но третье тело спустя некоторое время начало двигаться в сторону одного из тел. Изначально данный эксперимент был проинтерпретирован мной как подтверждение неустойчивости данной точки Лагранжа и погрешностей вычислений программы. Но данная интерпретация была ошибочная. Как выяснилось позднее, ошибка должна была накапливаться одинаково со стороны обоих компонентов. Третье тело должно было оставаться неподвижным. После этого была найдена ошибка в коде программы. Она заключалась в том, что тела двигались по очереди, а не одновременно. То есть сначала двигалось первое тело, и для его новых параметров пересчитывалось гравитационное взаимодействие между телами, хотя все это происходило в один момент времени. В итоге это приводило к большой неточности вычислений, нарушению симметрии и недостоверности результатов. В частности именно этим объясняется смещение всей системы вниз на протяжении времени в проводимых экспериментах (рис.3).

6 Е.И.Бутиков, «Задача трех тел» [http://faculty.ifmo.ru/butikov/Planets/Three-body.pdf], стр. 6-7

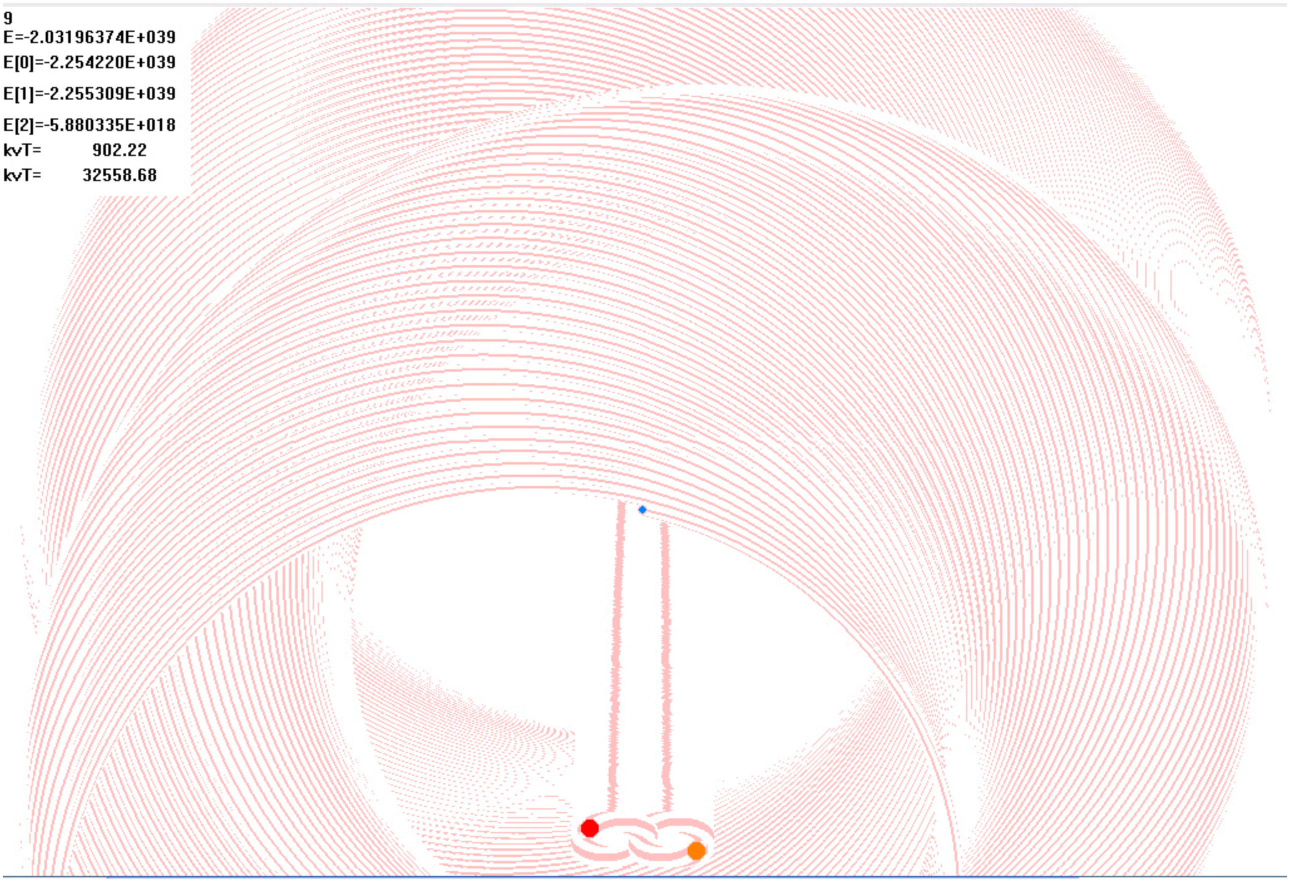

рис.3

Данная ошибка была обнаружена на завершающем этапе исследования, что если не опровергло, то как минимум поставило под большое сомнение все результаты и выводы, полученные ранее, а также не позволило мне провести большое количество экспериментов на новой модели. Стоит отметить, что один эксперимент в зависимости от целей и параметров может продолжаться от двух минут до нескольких дней, недель, месяцев. Потому провести новое исследование в кратчайшие сроки было невозможно. В данной ситуации я поставил себе цель понять, насколько сильно отличается точность моделей и какие из результатов, полученных на предыдущей модели, можно было бы назвать хоть сколько-нибудь приближенными к достоверным.

Моделирование первой точки Лагранжа (неподвижное третье тело в центре масс) на новой модели дало положительный результат: тело оставалось неподвижным на протяжении многих тысяч лет, вне зависимости от точности вычислений. На рисунке 4 видно, что третье тело осталось в самом центре и скорость его не изменилась, несмотря на то, что массивные тела разлетелись. Под kvT1 на данном рисунке подразумевается время существования системы на момент фиксации данных.

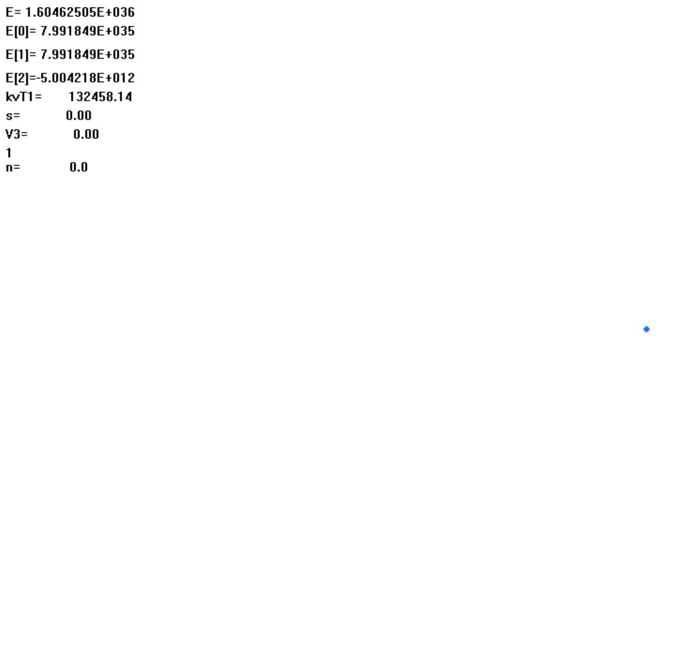

рис. 4

Один из первых экспериментов заключался в моделировании ситуации, в которой тело движется вокруг двойной звезды по круговой орбите на достаточно большом от нее расстоянии. Как результат эксперимента фиксировалось время, после которого орбита изменялась на один процент. При одинаковых начальных условиях данное время в два раза больше на первой (неправильной) программе, чем на исправленной. Т.е. точность результатов старой программы в данной ситуации в два раза выше, т.к. в идеальной ситуации орбита тела меняться не должна.

Для проверки моделей была смоделирована ситуация, решение которой известно, а именно были смоделирована ситуация Солнце-Земля-Луна (рис. 5). Все тела двигались по устойчивым орбитам. Период обращения системы Земля-Луна вокруг Солнца в реальности составляет 365.26 дней. Обе модели были запущены на 50 оборотов. При идеальной работе модели результат (в данной ситуации время, за которое были совершены 50 оборотов) должен был составить 50.04 года (в программах год равен ровно 365 дней). Результат старой программы равен 50.38 лет, новой – 50.39. Разница, как видно, невелика, при этом новая программа опять же в данной конкретной ситуации работает менее точно, хотя и совсем ненамного. Пока что два проверенных случая показывают большую точность старой модели, нежели новой. В ходе данного эксперимента было также обнаружено различие программ в другом аспекте. Одним из главнейших проблемных моментов, связанных с точностью вычислений, является несоблюдение закона сохранения полной механической энергии, т.к. в идеальной модели этот закон нарушаться не должен. И если в старой программе полная механическая энергия уменьшается, то в новой наоборот, энергия системы растет. За одинаковое количество оборотов (в данной ситуации 50), при одинаковой точности вычисления (одинаковом кванте времени) и прочих равных параметрах изменение энергии в старой модели почти в полтора раза больше, чем в новой. Этот факт говорит о том, что новая программа работает точнее.

рис. 5

Можно констатировать факт, что смоделированные ситуации не дают однозначного ответа на вопрос о степени некорректности результатов, полученных на старой модели. В данной ситуации очевидным является тот факт, что старая неправильная программа не работает значительно хуже новой, что можно было предполагать. Несмотря на то, что в старой программе есть очевидная ошибка, в некоторых случаях она может давать результаты точнее, чем новая. В конечном итоге сформулировать, насколько различаются точности программ, не представляется возможным. При проведении опыта, результат которого заранее неизвестен, на моделях можно получить два совершенно разных результата. И однозначно сказать, какой результат правильнее, будет нельзя, т.к. с одной стороны разница результатов может объясняться ошибкой в старой программе, а с другой стороны эта ошибка может в какой-то мере компенсировать неточность вычислений модели, что показали предыдущие опыты, поэтому результат может оказаться точнее. О механизмах этой компенсации сложно чего-либо говорить, однако на этот счет у меня существует гипотеза, что неточность вычислений программы приводит к накачке энергии в систему, а ошибка в коде позволяет эту накачку остановить. При этом получается, что ошибка в программе приводит к «ошибке в противоположную сторону», т.е. энергия системы не просто не растет, а еще и сильно уменьшается. Но данная гипотеза не подкреплена никакими специальными экспериментами. Так как планирование новых экспериментов и, собственно, экспериментирование требуют больших временных ресурсов, которых по названным причинам нет, то в дальнейшем будут описаны некоторые эксперименты, проведенные на старой модели, с их разбором и попыткой определить степень корректности.

Несомненно, стоит упомянуть о тех мерах, которые необходимо предпринять для того, чтобы уменьшить погрешность расчетов и улучшить точность модели. Квант времени должен быть как можно меньше. При этом необходимо учитывать, что, согласно результатам серии экспериментов, точность вычислений параметров прямо пропорциональна времени работы программы (рис.6). Под точностью вычислений подразумевается величина, обратная кванту времени. Чем квант времени меньше, тем дольше программа будет проводить расчеты, а, значит, тем больше времени понадобится для проведения одного эксперимента, что в плане конечного результата может оказаться серьезной помехой.

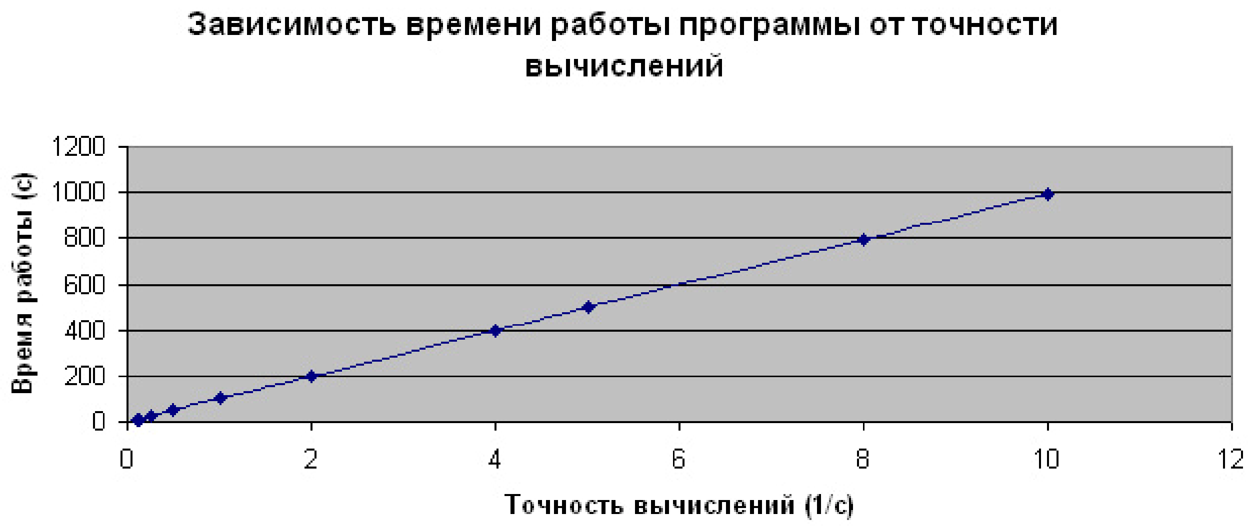

рис.6

Квант времени играет важную роль в точности вычислений и корректности работы программы. Чем больше квант времени, тем менее правильной и корректной становится модель. В результате серии экспериментов с неизменными параметрами было выяснено, что время существования связанной системы увеличивается при малом кванте времени, особенно это заметно на небольших расстояниях между легким телом и двойной звездой. О важности роли кванта времени также свидетельствует то, что при его изменении результаты эксперимента могут меняться на противоположные. Например, в одном из экспериментов при изменении кванта времени в 5 раз легкое тело не сталкивается с компонентом двойной звезды, как происходило до изменения, а вылетает за пределы системы.

Важно понимать, что неточности вычислений, которые ярчайшим образом проявляются в масштабном несоблюдении закона полной механической энергии, образуются, если не полностью, то во многом при взаимодействии массивных компонентов двойной звезды. При относительно близких взаимодействиях их скорости достаточно велики, и даже за малый квант времени они проходят большие расстояния, причем их движения, как было описано ранее, считаются в этот промежуток равноускоренными. В результате такого взаимодействия координаты тел будут сильно различаться с теми, которые должны быть в идеальной модели.

Для уменьшения последствий этого эффекта были внесены следующие коррективы. Если расстояние между массивными телами меньше, чем некоторое заданное критическое расстояние $r_{кр}$, то квант времени уменьшается в определенное количество раз, что позволяет сильно увеличить точность программы, при этом не задавая маленький квант времени на все время работы программы, что негативно отразилось бы на скорости вычислений. Причем, чем ближе объекты, тем в большое количество раз уменьшался квант времени.

Еще одна поправка коснулась начальных параметров массивных тел. Расстояние между ними было увеличено, а скорости подобраны таким образом, что минимальное расстояние между телами оказывалось относительно немаленьким. Все это позволило во много раз уменьшить прирост энергии и, соответственно, увеличить точность вычислений. Серия экспериментов показала, что за одинаковое время и с одинаковым квантом времени, в случае с более удаленными компонентами двойной звезды значение полной механической энергии изменяется во много раз меньше (например, один из экспериментов показал, что изменения полной механической энергии отличаются в 333 раза).

Для проверки работы модели была смоделирована задача двух тел, решение которой известно (рис.7). Легкое тело было запущено вокруг покоящегося массивного с круговой (первой космической) скоростью, которая рассчитывается по формуле: $\sqrt{G*\frac{M}{R}}$. В данной ситуации легкое тело должно вращаться вокруг массивного, имея в качестве орбиты окружность. Тело действительно вращалось по окружности, однако полная энергия системы медленно возрастала и радиус орбиты постепенно увеличивался. Причем, чем больше квант времени, тем быстрее возрастал радиус окружности.

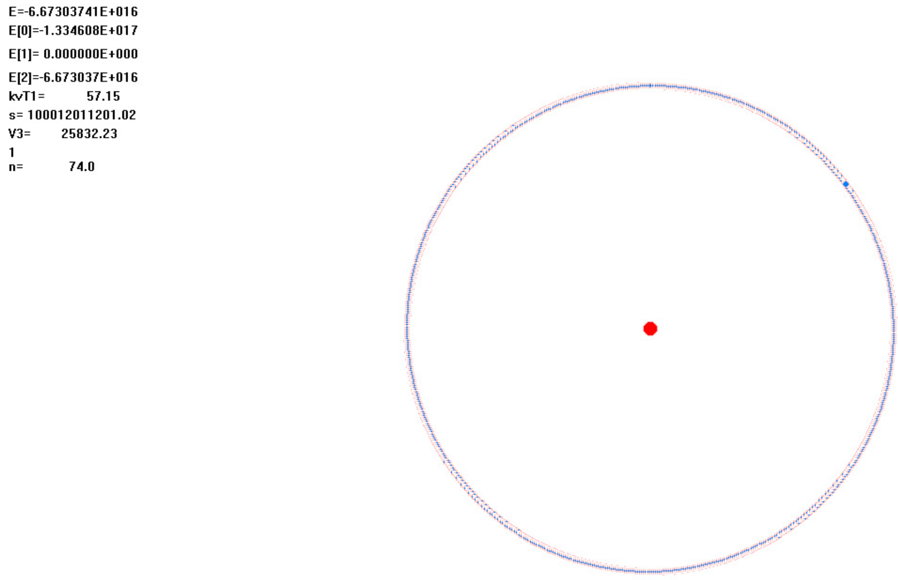

рис. 7

Важно понимать, что все вышеописанные меры и поправки не решают проблемы неточности вычислений, а лишь частично компенсируют ее. Очевидно, что программа после них стала работать правильнее и вычислять точнее, однако результаты по-прежнему не являются достоверными и, вероятно, достаточно сильно отличаются от реальной ситуации. Но как мне кажется, при малом кванте времени и небольшом времени работы программы с учетом всех внесенных коррективов возможно получение результатов близких к реальным ситуациям. Ошибка в вычислениях за относительно малое время работы модели накапливается не слишком большая, потому можно говорить о том, что, несмотря на все неточности и ошибки программы, от нее можно получить результаты, которые хоть и не будут полностью достоверными, но могут быть приближенными к ним.

§2.2 Поиск устойчивых орбит

В данном параграфе будут описаны основные серии экспериментов, которые проводились на старой модели, по поиску устойчивых орбит. Большинство результатов, что очевидно, сильно отличаются от реальной ситуации. Но, на мой взгляд, часть полученных результатов не в количественном, а в качественном плане могут претендовать на то, чтобы считаться близкими к достоверным. По ходу экспериментов мною были выдвинуты разнообразные гипотезы для ответов на обозначенные во введении вопросы, и часть данных гипотез будет представлена в дальнейшем.

В качестве результата эксперимента, в основном, фиксировалось время существования системы, которое и заносилось в таблицу результатов. Но в данный момент эта таблица не имеет никакого практического значения, т.к. в коде программы была допущена ранее описанная ошибка, которая в момент заполнения таблицы найдена еще не была.

Об условности всех цифр говорят результаты эксперимента, который был проведен на новой модели. Все параметры этого эксперимента соответствовали значениям тех же параметров в эксперименте, который ранее был проведен на старой модели. В итоге, времена существования одной и той же системы трех тел в старой и новой модели различались в 5 раз, что говорит о том, что полученные численные результаты не могут считаться достоверными ни при каких условиях.

Основная задача экспериментальной части заключалась в поиске устойчивых орбит легкого тела. Для начала стоит упомянуть об известном решении данной задачи, а именно о треугольной точке Лагранжа, о которой говорилось в первой главе. Легкое тело в данной ситуации образовывает с другими телами равносторонний треугольник. Известно, что если отношение масс массивных тел больше 24.96, а тело меньшей массы и легкое тело двигаются по круговой орбите вокруг наиболее массивного объекта с одинаковыми скоростями, то такая орбита будет устойчивой. Данная ситуация была смоделирована. Если рассматривать относительно небольшой промежуток существования системы, то, имея в виду все неточности и погрешности программы, а также ошибку в программе, можно сказать, что в первом приближении тела в любой момент времени находились в вершинах равностороннего треугольника. Для подтверждения устойчивости потребовались бы достоверные численные данные, которые по уже описанным ранее причинам данная программа предоставить не могла. При небольшом изменении скорости или расстояния в первом приближении ничего не изменяется, что говорит о том, что на визуальном уровне устойчивость наблюдается.

Эксперименты по поиску устойчивых орбит проводились следующим образом. Все тела изначально находились на одной прямой. Перпендикулярно этой линии были направлены скорости всех тел. Компоненты двойной звезды имели одинаковые массы. Легкое тело изначально находилось на расстоянии в десятки раз превышающим расстояние между компонентами двойной звезды. Оно запускалось с круговой скоростью, в результате чего можно было наблюдать орбиту – в первом приближении она напоминала окружность, радиус которой несущественно изменялся (рис.8). При небольшом масштабе орбита визуально казалась окружностью с неменяющимся радиусом. Однако вся система смещалась вниз, что объясняется как раз ошибкой в коде программы. Разумеется, говорить об устойчивости орбиты, основываясь на визуальных наблюдениях, нельзя. При этом в теории, если расстояние между третьим телом и двойной звездой существенно больше расстояния между компонентами звезды, то ее приближенно можно считать единым объектом. Потому тело должно двигаться по окружности, как и в случае двух тел. И так как эта ситуация приблизительно наблюдалась в модели, а так же имеет теоретическое обоснование, то есть все основания предполагать, что такая орбита может быть устойчивой.

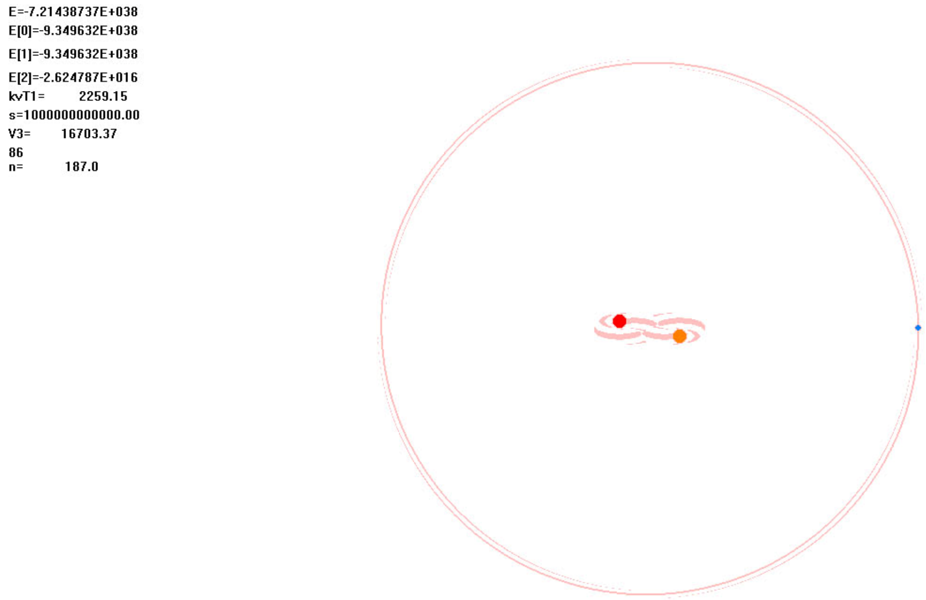

рис.8

С каждым следующим экспериментом легкое тело приближалось к двойной звезде. Во время первых экспериментов визуальных отличий от предыдущей ситуации не наблюдалось, но по мере уменьшения начального расстояния орбита начинала деформироваться. Изначально, она меняла свое положение в пространстве, но оставалась визуально замкнутой со слабо меняющимся значением эксцентриситета. Затем осталась лишь замкнутость, а сами орбиты стали деформироваться сильнее. Прежде всего, это можно было связать с тем, что разница во влиянии на легкое тело разных компонентов двойных звезд стала более значимой, что привело к зависимости дальнейшей формы и размера орбиты от пространственного положения компонентов системы в конкретные моменты времени. В ходе экспериментов была выдвинута гипотеза, что замкнутость орбиты напрямую зависит от значения энергии легкого тела в начальный момент времени, но несмотря на то, что некоторое количество экспериментов в первом приближении подтвердило данную гипотезу, при относительно небольших расстояниях она была опровергнута. Еще одна выдвинутая по ходу экспериментов гипотеза формулировалась следующим образом: для данного расстояния можно найти такой промежуток начальных скоростей легкого тела, что оно не будет ни сталкиваться с массивным объектами, ни вылетать за пределы системы из-за слишком большой скорости. Третье тело может не вылетать и не сталкиваться с другими объектами системы на протяжении длительного времени, в течение которого может накопиться серьезная ошибка в вычислениях. Эта ошибка в конечном итоге делает результат любого подобного эксперимента полностью недостоверным. Отсюда следует вывод, что проверить эту гипотезу на данной модели не представляется возможным.

Стоит упомянуть о результатах, которые получены при изначальном расположении легкого тела на «средних» расстояниях. Под «средним» я понимаю расстояние еще не слишком близкое к двойной звезде (Под близким расстоянием я подразумеваю ситуацию, в которой дистанция между легким телом и одним из компонентов двойной звезды в два или более раз меньше, чем расстояние между самими компонентами.), но и не слишком далекое, где наблюдается первый случай предполагаемой устойчивой орбиты. Движение, а следовательно, и орбита легкого тела при данных начальных расстояниях сильно зависит от мгновенных параметров всех тел системы, что объясняется, как было сказано ранее, заметной разницей во влиянии на легкое тело со стороны различных компонентов двойной звезды. Это означает, что даже небольшая ошибка в вычислениях способна существеннейшим образом повлиять на дальнейшее развитие ситуации. А если учесть, что для исследования орбиты тела на данном расстоянии система должна существовать довольно длительное время, то ошибка будет накапливаться существенная. Отсюда и возникают совершенно непредсказуемые результаты (рис. 9), которые, разумеется, являются гарантированно недостоверными и опираться на них нельзя. На данных дистанциях и близко не наблюдается орбита, которую можно назвать устойчивой, поэтому интерес здесь представляет не поиск устойчивых орбит, а попытка моделирования ситуации, в которой система останется связанной. Такая ситуация найдена не была, что не означает, что ее не существует.

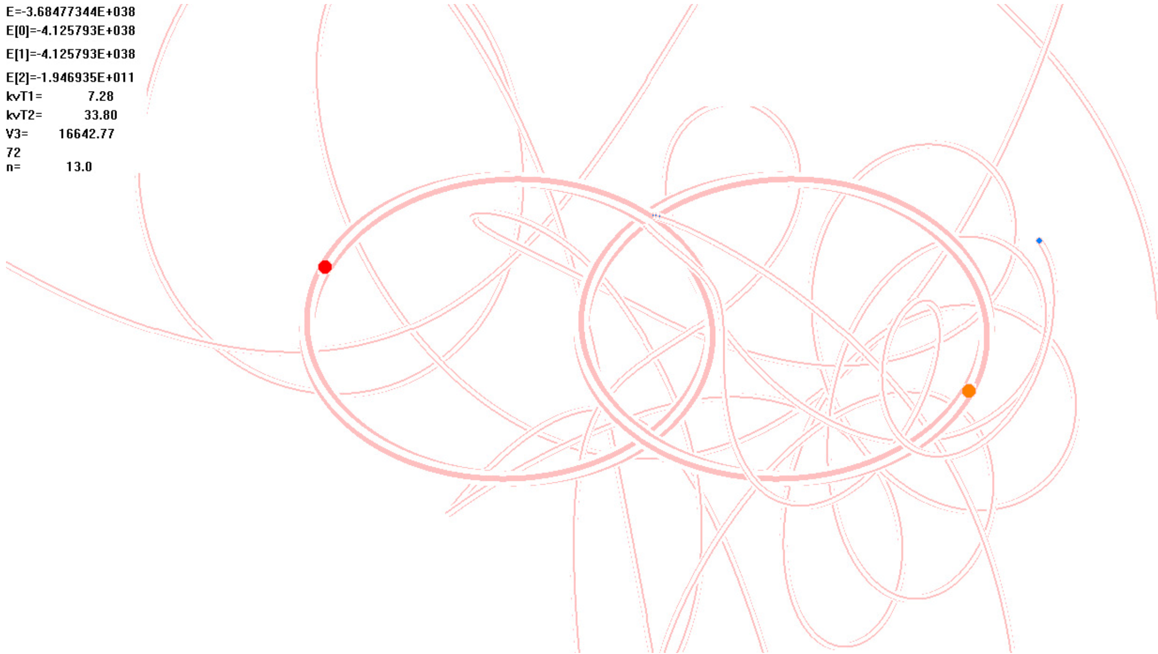

рис. 9

При дальнейшем приближении легкого тела к одному из компонентов двойной звезды наблюдалось следующее. Орбита была сильно нестабильной, и система существовала не более нескольких лет. Это очевидно, поскольку данный случай отличается от предыдущего лишь тем, что разница влияний на легкое тело разных компонентов двойной звезды заметно возросла. В результате было принято решение запускать легкое тело не с круговой скоростью относительно центра масс, считая, что в этой точке сосредоточена полная масса двойной звезды, как происходило до этого, а по-другому. Начальная скорость легкого тела стала задаваться круговой для ближайшего компонента двойной звезды, то есть второй компонент (дальний) не учитывался при задании скорости. Очевидно, что при отсутствии этого самого дальнего компонента, тело должно было двигаться по окружности вокруг ближайшего небесного объекта.

Изначально орбита по-прежнему была сильно нестабильной. Однако по мере приближения третьего тела к ближайшему компоненту двойной звезды орбита визуально стабилизировалась. И чем ближе было легкое тело, тем на протяжении более длительного времени система стабильно существовала. Объяснить это можно тем, что при небольших расстояниях влияние ближайшего компонента становится настолько сильным, что дальний компонент не может «перетянуть» легкое тело к себе или еще каким-либо образом существенно повлиять на орбиту в системе отсчета, связанной с ближайшим компонентом. Фактически в данной ситуации легкое тело является спутником ближайшего компонента двойной звезды (рис. 10). То есть в какой-то мере моделируется ситуация Солнце-Земля-Луна. Исходя из визуальных наблюдений, а также теоретических обоснований и примеров, можно с уверенностью предположить, что данная орбита будет устойчива.

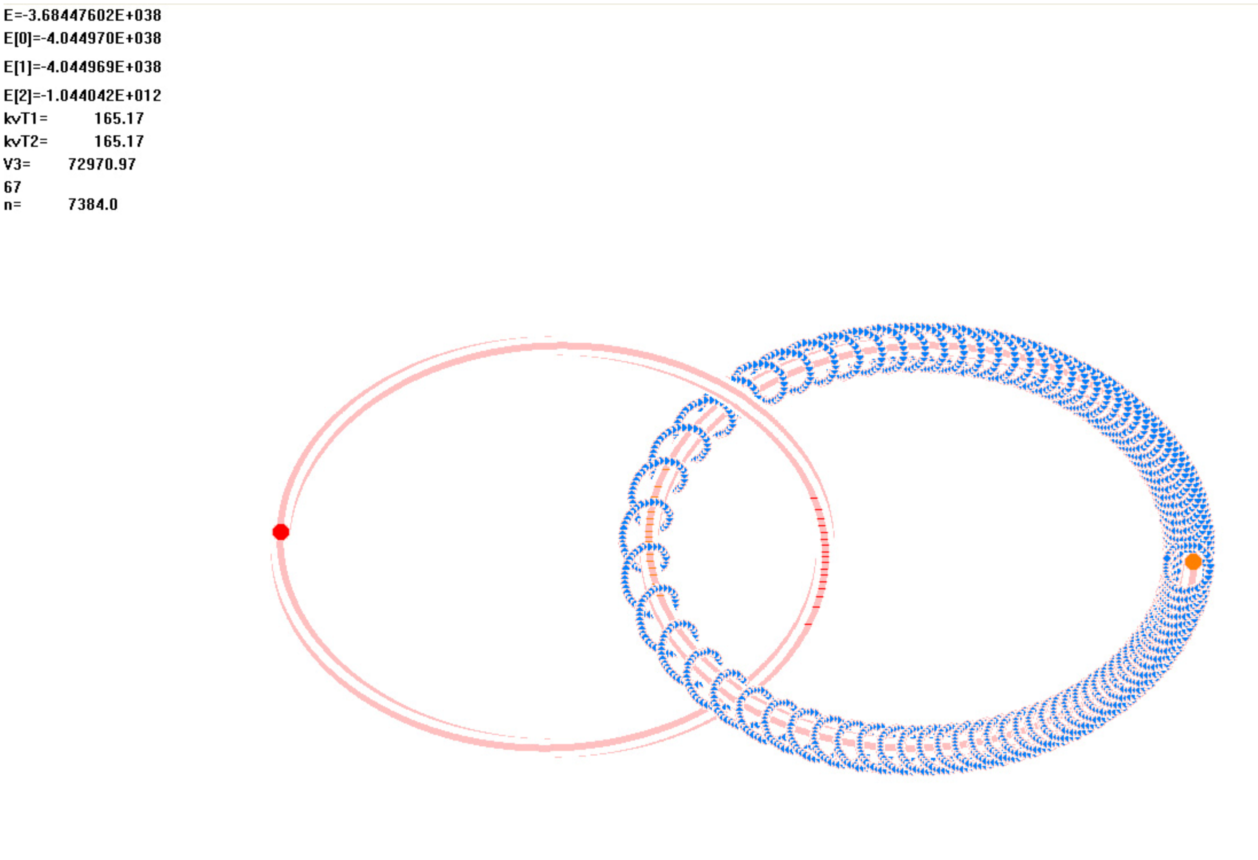

рис. 10

На уровне гипотезы был придуман еще один возможный вариант, при котором легкое тело будет иметь устойчивую орбиту. Он заключается в том, что легкое тело будет со временем переходить в качестве спутника с одного компонента двойной звезды на другой в тот момент, когда расстояние между ними будет минимальным. Очевидно, что этот случай требует крайне точных расчетов, поскольку расстояния между телами относительно небольшие, особенно в момент предполагаемого перескока, а следовательно, даже небольшая ошибка может привести к полностью неправильным результатам. На мой взгляд, такой вариант найти и проверить на данной программе практически невозможно, так как она просто неспособна совершать вычисления необходимой точности, или потребуется слишком большой временной ресурс на проведение эксперимента. На рисунке 11 представлена попытка моделирования подобного случая.

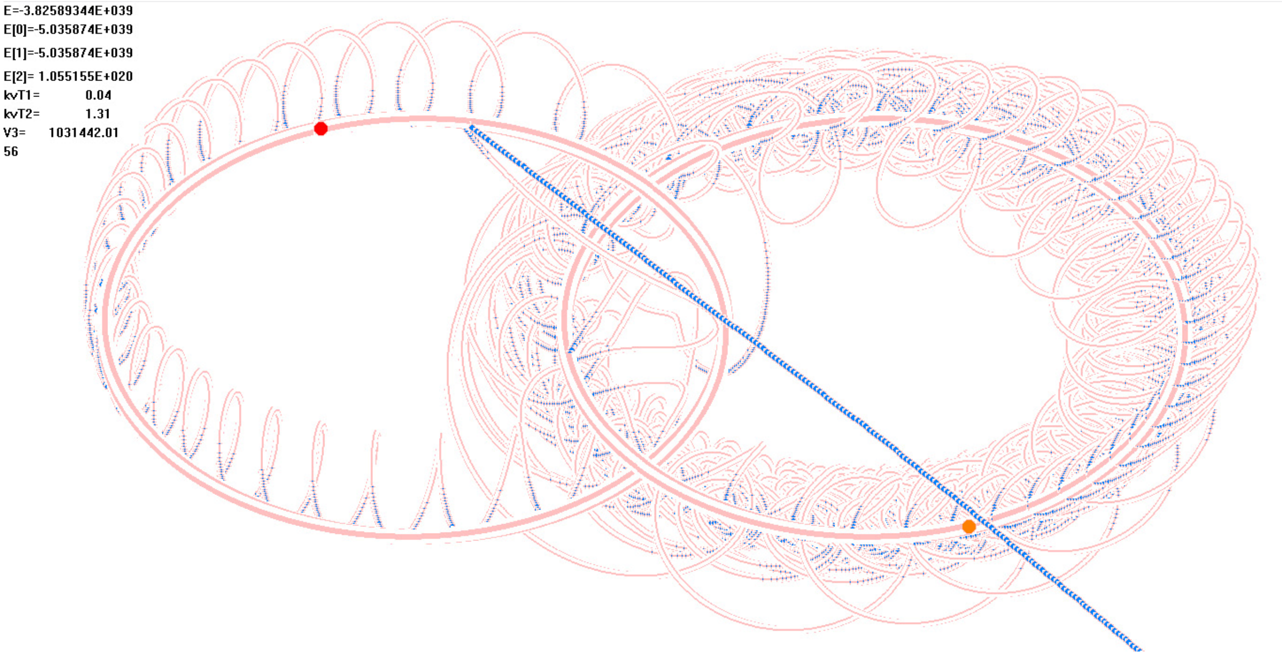

рис. 11

Для того чтобы проверить, является орбита устойчивой или нет, был разработан следующий метод. Необходимо найти некий параметр, который у легкого тела в идеальной ситуации должен быть постоянным. Например, это может быть расстояние от третьего тела до центра масс двойной звезды или скорость этого тела в первом случае предполагаемой устойчивой орбиты (когда расстояние от легкого тела до двойной звезды сильно больше расстояния между ее компонентами), или расстояние до ближайшей компоненты двойной звезды во втором случае. Затем смоделировать тот случай, когда устойчивая орбита должна наблюдаться. В обоих случаях это запуск легкого тела с круговой скоростью, либо относительно центра масс двойной звезды, считая, что вся масса сосредоточена в этой точке, либо относительно ближайшего компонента двойной звезды, без учета при расчете этой скорости дальнего компонента, в зависимости от ситуации. В результате этого эксперимента нужно зафиксировать время, через которое ранее выбранный параметр изменился на некоторую долю, например на один процент. Затем необходимо изменить какой-либо из начальных параметров тела (скорость или расстояние до соответствующего объекта) на небольшую долю, которая не сможет сильно повлиять на траекторию, но все же будет хоть сколько-нибудь заметной, например, можно увеличить начальную скорость на один процент. И во вновь проведенном эксперименте опять зафиксировать время, через которое исходно выбранный параметр изменится на долю, которая была выбрана во время первого эксперимента. Если зафиксированные времена не будут различаться в рамках погрешности, то можно будет говорить об устойчивости орбиты. Неустойчивыми орбиты будут в том случае, если эти времена будут сильно различаться, так как в этом случае можно будет говорить о нарушении равновесия – тела, покинувшие положение неустойчивого равновесия самопроизвольно более не возвращаются туда. Для большей достоверности эксперимента можно поочередно изменить сначала скорость, затем расстояние и после этого сопоставить результаты.

§2.3 Критерий связанности системы трех тел

Одним из вопросов, обозначенных во введении, является вопрос о критерии связанности систем, состоящих из трех тел. В данном исследовании я искал вышеописанный критерий связанности на энергетическом уровне, т.е. рассматривая полные энергии всех тел, энергию системы в целом и энергии попарных взаимодействий тел. Для этого требовалось задать некоторую массу третьему телу, т.к. в изначальном варианте его масса равнялась нулю. При проверке влияния задания небольшой массы третьему телу на движение массивных тел и изменения результатов эксперимента было выяснено, что сравнительно небольшая масса не влияет заметным образом ни на движение массивных тел, ни на результаты эксперимента. Изменение этой массы на любую другую сравнительно небольшую массу также никаким заметным образом не повлияло на эксперимент. После этого третьему телу была задана относительно маленькая масса, что позволило сосчитать полную энергию этого тела и энергию взаимодействия каждого из массивных тел с ним по отдельности.

На мой взгляд, несмотря на ошибку в программе, результатам, которые описаны ниже, можно доверять. Ошибка в программе и погрешность в вычислениях обеспечивали неправильность подсчета изменения координат тела и его скорости, то есть из-за этих ошибок тела отклонялись от реальной ситуации и модель, соответственно, неточно воспроизводила движение объектов. Но энергии, на которые опирается исследование критерия связанности системы, не зависят от точности моделирования реальной ситуации. Они правильно считались в текущий момент времени для данной конкретной скорости и координаты тела. Значимой ошибки между пересчетами энергий накопиться просто не могло, так как пересчитывались они через квант времени. И, как мне кажется, это позволяет говорить об относительной точности исследования критерия связанности системы трех тел на энергетическом уровне.

Первая гипотеза этого исследования состояла в том, что система из трех тел является связанной, если полная энергия этой системы меньше нуля. Эта гипотеза была опровергнута первым же экспериментом, в результате которого легкое тело покинуло систему, а полная энергия системы все равно оставалась меньше нуля, что объясняется ничтожным влиянием третьего тела на полную энергию системы из-за того, что его масса имеет относительно маленькое значение.

Следующая гипотеза о том, что все три попарных взаимодействия между телами должны быть меньше нуля была опровергнута по тем же причинам – энергия взаимодействия между массивными телами оставалась меньше нуля, несмотря на вылет третьего тела. Гипотеза о том, что если хотя бы одно из попарных взаимодействий больше нуля, то система не связана, также была опровергнута, т.к. в одном из экспериментов энергия взаимодействия легкого тела с одним массивным была меньше нуля, а с другим – больше. Но легкое тело при этом вернулось в результате к двойной звезде, и обе энергии вновь были отрицательными.

Следующая гипотеза формулировалась следующим образом: если полная энергия каждого из компонентов системы меньше нуля, то такая система связанная. Данная гипотеза была подтверждена несколькими опытами, однако вскоре была опровергнута. Дело в том, что энергия легкого тела в моменты, когда оно пролетало на относительно небольшом расстоянии до двойной звезды на большой скорости, могла колебаться около нуля, становясь в определенные моменты то положительной, то вновь отрицательной. Однако в ходе серии экспериментов было замечено, что в том случае, если легкое тело имело энергию больше нуля в течение продолжительного времени и относительно близких и активных взаимодействий между двойной звездой и легким телом не предвиделось, данное тело никогда более не возвращалось к двойной звезде. Иными словами, система переставала быть связанной. Данный критерий был подтвержден многочисленными экспериментами, а опровержение найдено не было. Максимальное время перескоков энергии с положительного значения на отрицательное было 0,2 года. В той ситуации легкое тело на высокой скорости летело между компонентами двойной звезды и по мере приближения к одному из компонентов энергия третьего тела уменьшалась. В конечном итоге суммарная потенциальная энергия гравитационного взаимодействия вновь превысила по модулю кинетическую энергию. Но этот случай описывает именно близкое, активное взаимодействие между легким телом и двойной звездой. Для того чтобы точно определить будет ли наблюдаться активное взаимодействие между двойной звездой и легким телом мной был сформулирован следующий критерий. Прямая, проходящая через тело, энергия которого больше нуля, перпендикулярная его мгновенной скорости, разделит все пространство на две полуплоскости. Если два других тела располагаются в одной полуплоскости и при этом вектор мгновенной скорости исходного тела находится в другой полуплоскости, то близкого, активного взаимодействия наблюдаться не будет, а значит, тело покинуло систему. Данный критерий не был проверен из-за нехватки временных ресурсов, но у меня, с опорой на результаты многих экспериментов, есть все основания предполагать, что он окажется верным.

В результате проведенных экспериментов была исследована компьютерная модель, ее достоверность и соответствие реальной ситуации. Из-за существующего кванта времени модель неточно вычисляет последующие координаты и изменение скоростей тел. И если изначально эта ошибка не влияет существенным образом на поведение системы, то со временем она становится весьма заметной. Были приняты меры по уменьшению значимости данной неточности. В частности, квант времени изменялся в зависимости от расстояния между телами и массивные тела были разведены на большее расстояние.

При исследовании модели на корректность были смоделированы случаи, решение которых известно. Модель изображала их с погрешностью, которая была связана с неточностью вычислений. Один из случаев, который дал отрицательный результат, был ошибочно проинтерпретирован мной неправильно, что в конечном итоге привело к неправильной работе всей программы и недостоверности большинства полученных результатов. Ошибка была обнаружена на заключительном этапе исследования, что не позволило повторить все опыты на новой, исправленной модели из-за нехватки временных ресурсов, т.к. время одного эксперимента помимо того, что изначально достаточно велико, также прямо пропорционально точности эксперимента. И если для эксперимента потребуется увеличенная точность, то и время эксперимента будет увеличиваться. Новая модель была сопоставлена со старой. В результате этого сопоставления был сделан вывод, что обе модели работают неточно, и что результаты старой модели в некоторых случаях могли быть даже точнее, чем новой. Из-за ошибки и неточностей все полученные численные данные можно открыто признать недостоверными. Поэтому рассматривалась только качественные результаты на визуальном, теоретическом и (или) практическом уровнях.

Эти результаты позволили найти возможные устойчивые орбиты. Таких предполагаемых орбит было найдено две. Первая орбита была у легкого тела, которое изначально находилось на расстоянии в десятки, а в общем случае, во много раз превышающем расстояние между компонентами двойной звезды. Оно запускалось с круговой скоростью для расстояния до центра масс, считая, что масса всей двойной звезды сконцентрирована в данной точке. Вторая орбита была у легкого тела, когда оно являлось спутником одного из массивных тел. В этой ситуации влияние ближайшего компонента двойной звезды на тело сильно больше, чем влияния другого. Предполагается, что орбита в данной ситуации должна быть круговой относительно ближайшего компонента двойной звезды.

Также была выдвинута гипотеза о возможном существовании устойчивой орбиты в ситуации, когда третье тело перескакивает в качестве спутника с одного компонента на другой, но смоделировать данную ситуацию на данной программе не удалось по причине либо большой погрешности, либо слишком большой продолжительности эксперимента, в зависимости от начальных параметров.

Были смоделированы известные ситуации устойчивой орбиты, а именно треугольные точки Лагранжа, устойчивость которых хоть и не была численно доказана с помощью модели, но в первом приближении на визуальном уровне наблюдалась орбита, которую предположительно можно считать устойчивой, что соответствует теоретическим предсказаниям и практическим наблюдениям.

В ходе исследования была попытка установить критерий связанности системы трех тел. Этот критерий рассматривался на энергетическом уровне, что в какой-то мере может свидетельствовать о его правильности даже в неправильно считающей координаты модели. В результате многочисленных экспериментов был сформулирован следующий критерий: Если одно из тел имеет энергию больше нуля и при этом относительно близких, активных взаимодействий между этим телом и другими не предполагается, то система не является связанной. Этот критерий не является достаточно точным, поэтому был сформулирован возможный точный критерий устойчивости системы трех тел: Прямая, проходящая через тело, энергия которого больше нуля, перпендикулярна его мгновенной скорости, разделит все пространство на две полуплоскости. Если два других тела располагаются в одной полуплоскости и при этом вектор мгновенной скорости исходного тела находится в другой полуплоскости, то близкого, активного взаимодействия наблюдаться не будет, что означает, что система перестала быть связанной. Данный критерий подтвержден не был в силу нехватки временного ресурса на его подтверждение.

Был также описан возможный метод проверки устойчивости той или иной постоянной орбиты. Он заключается в сравнении времени изменений параметра тела или орбиты, который в идеальной модели изменяться не должен, в случаях с исходными начальными параметрами и немного измененными начальными параметрами. Этот метод должен помочь при определении устойчивости орбиты в правильно работающей модели, численным данным которой можно доверять.

Заключение

- В результате проделанной работы была создана компьютерная модель на языках Pascal и C++, имитирующая вращение планеты вокруг двойной звезды по законам гравитации Ньютона, с приближением движения тел к равноускоренному за заданный интервал времени. Данная модель при определенных условиях может достаточно достоверно изображать реальную ситуацию, ее достоинства и недостатки были исследованы, а также были найдены и предложены некоторые пути улучшения сходства моделируемой ситуации с реальной. Однако погрешность в вычислениях не позволяет моделировать некоторые ситуации, в которых точность играет определяющую роль в получении результата. Если увеличивать точность работы программы, то время выполнения будет расти и может достигать таких значений, что временных ресурсов не будет хватать на проведения даже одного эксперимента.
- С помощью вышеописанной компьютерной модели были проведены эксперименты, в ходе которых была исследована орбита планеты небольшой массы, с изменяющимися параметрами.
- В ходе исследования в коде программы была обнаружена ошибка, которая подвергла сомнению правильность большинства полученных результатов. Неправильность численных результатов не позволила строго доказать устойчивость найденных орбит, но все качественные результаты были проанализированы на достоверность. Часть полученных результатов можно считать относительно близкими к достоверным. Все подобные результаты были рассмотрены и описаны в данном исследовании.
- Была смоделирована известная ситуация устойчивой орбиты, а именно треугольная точка Лагранжа, устойчивость которой хоть и не была доказана с помощью модели, но в первом приближении на визуальном уровне

наблюдалась орбита, которую предположительно можно считать устойчивой, что соответствует теоретическим предсказаниям и практическим наблюдениям.

- Были найдены два типа предполагаемых устойчивых орбит. Первый тип включает в себя движение легкого тела по круговой орбите, если оно изначально находилось на расстоянии, во много раз превышающим расстояние между компонентами двойной звезды. Второй тип предполагаемых устойчивых орбит проявляется в ситуации, когда легкое тело является спутником одного из массивных компонентов двойной звезды. В этом случае тело двигалось по круговой орбите относительно ближайшего компонента двойной звезды.
- Несмотря на то, что устойчивость данных орбит не была доказана численно, она была теоретически обоснована, подтверждена на визуальном уровне, а в некоторых случаях был найден реальный аналог.
- Был также описан возможный метод проверки устойчивости той или иной постоянной орбиты. Суть его сводится к сравнению времени одинаковых изменений параметра, который должен быть постоянным в идеальной модели, тела или орбиты при небольшом отклонении начальных параметров тела от положения равновесия.
- В ходе исследования была попытка установить энергетический критерий связанности системы трех тел. В результате экспериментов был сформулирован следующий критерий: Если одно из тел имеет энергию больше нуля и при этом относительно близких, активных взаимодействий между этим телом и другими не предполагается, то система не является связанной. Этот критерий не является достаточно строгим, но он был подтвержден многими экспериментами, а опровергнут не был. При этом был сформулирован возможный точный критерий устойчивости системы трех тел, но подтвержден он не был в силу нехватки временного ресурса на его подтверждение.

- Как было выяснено, одной из главных проблем данного исследования является необходимость большого временного ресурса для проведения экспериментальной части. Именно эта проблема во многом не позволила мне перейти к численным результатам.
- При дальнейшей работе в первую очередь необходимо проверить устойчивость найденных орбит с помощью описанного метода, а также подтвердить критерий связанности системы трех небесных тел. Ошибки и неточности вычисления, методы их исправления и уменьшения влияния были подробно описаны, что позволяет в рамках эксперимента подбирать такие значения, которые позволят достаточно точно моделировать большинство ситуаций, застрачивая при этом необходимый временной минимум. Все это позволяет говорить о том, что данное исследование, несомненно, может быть продолжено и доведено до количественных и новых качественных результатов.

Список литературы:

1. Г.Н. Дубошин, «Справочное руководство по небесной механике и астродинамике», М.: «Наука», 1976.
2. А.П. Маркеев, «Задача трех тел и ее точное решение», Соросовский образовательный журнал, №9, 1999.
3. Е.И.Бутиков, «Задача трех тел» [http://faculty.ifmo.ru/butikov/Planets/Three-body.pdf]
4. Neil J. Cornish «The Lagrange Points» [http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf]